ANALYSIS

Integration
Grundniveau

Trainingsaufgaben

zum unbestimmten Integral (Stammfunktionen)
und zum bestimmten Integral
mit sehr ausführlichen Erklärungen

Hier nur Integration ohne Substitution

Datei Nr. 48030

Stand 6. Februar 2024

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

https://mathe-cd.de

Vorwort

Viele Bundesländer haben inzwischen den Stoffbereich der Analysis eingeschränkt. Damit werden viele Integrationsmethoden nicht mehr behandelt, u. a. deshalb, weil dazu höherwertige Rechner verwendet werden dürfen. Damit spart man knappe Unterrichtszeit im G8 ☹.

In den Pflichtaufgaben ohne Hilfsmittel werden jedoch bestimmte Grundkenntnisse abgeprüft. Dazu gehören die Integration von Potenzfunktionen aller Art, von ganzrationalen Funktionen und von gebrochen rationalen Funktionen, zu denen man kein Substitution benötigt.

Dieser Trainingstext passt sich diesem Trend an und bietet Training auf diesem Grundniveau an.

Wer jedoch einen Leistungskurs besucht, in dem Substitution usw. noch behandelt wird, der findet im Text 48012 weitere Aufgaben zum vorliegenden Thema.

Dort gibt es auch zum Inhalt dieses Textes weitere Beispiele und Aufgaben.

Stoff-Verteilung Integration

Datei Nr. 48011 Teil 1	Einführung in die Grundlagen: Änderungen und Differenziale Lineare Änderungen / Nicht-lineare Änderungen Lineare Änderungen auf der Tangente - Differenzialbegriff Das unbestimmte Integral – Stammfunktionen - Grundintegral 1
Datei Nr. 48012 Teil 2:	Integrationsregeln Unbestimmte Integrale für ganzrationale und gebrochen rationale Funktionen mit vielen Substitutionsarten. Umfangreiches Übungsmaterial
Datei Nr. 48013 Teil 3	Das bestimmte Integral für Potenzfunktionen, ganzrationale und gebrochen rationale Funktionen, auch mit Substitution.
Datei Nr. 48014 Teil 4	Integration von Wurzelfunktionen (1)
Datei Nr. 48015 Teil 5	Partielle Integration: alles
Datei Nr. 45041 Teil 6	Exponentialfunktionen alles
Datei Nr. 46041 Teil 7	Ln-Funktionen alles
Datei Nr. 48016 Teil 8	Trigonometrische Funktionen alles
Datei Nr. 48030	Grundniveau für einfache Anforderungen: Gemischtes Trainingsheft Gründliches Wiederholen und Üben: Potenzfunktionen, Rationale Funktionen, Wurzel-, Exponential- und Trigonometrische Funktionen.
Datei Nr. 48040	Lernblatt: Die wichtigsten Integrale

Höheres Niveau (Studium)

Datei Nr. 48050	Integrationsmethoden zu gebrochen rationalen Funktionen
Datei Nr. 48051	Gebrochen rationale Funktionen: Integration mit Partialbruchzerlegung
Datei Nr. 48052	Gebrochen rationale Funktionen: Reduktionsformel bzw. Umgekehrte partielle Integration
Datei Nr. 48055	Gebrochen rationale Funktionen: Integration mit arctan-Funktionen
Datei Nr. 48060	Schwere Integrale mit gebrochen rationalen Funktionen
Datei Nr. 48056	Integration von Wurzelfunktionen (2) mit arcsin-Funktionen
Datei Nr. 48070	Integration von Wurzelfunktionen (3): Substitutionen mit sin und sinh
Datei Nr. 48057	Integration der Arkusfunktionen
Datei Nr. 48061	Schwierige Integrale Aufgabensammlung
Datei Nr. 48061	Schwierige Integrale Aufgabensammlung
Datei Nr. 48070	Substitutionen mit sin und sinh

Inhalt

1 Integration von Potenzfunktionen

1.1 Grundwissen

Leitet man eine Funktion ab, dann erhält man „natürlich“ ihre Ableitungsfunktion. Macht man diesen Vorgang rückgängig, erhält man eine Funktion, die man „**eine** Stammfunktion“ nennt.

a) Grundfunktion: $f(x)=x^2$ Ableitungsfunktion: $f'(x)=2x$

$f(x)=x^2+5$ $f'(x)=2x$

$f(x)=x^2-\frac{3}{2}$ $f'(x)=2x$

Weil das Absolutglied bei der Ableitung Null wird, haben diese drei (und eigentlich die Funktion $f(x)=x^2+C$) alle dieselbe Ableitungsfunktion.

Nun kehren wir diesen Vorgang um und „leiten auf“:

Grundfunktion: $f(x)=2x$ **Stammfunktion:** $F(x)=x^2+C$

Integralschreibweise: $F(x)=\int 2x\,dx=x^2+C$

b) Grundfunktion: $f(x)=\frac{1}{3}x^3+C$ Ableitungsfunktion: $f'(x)=\frac{1}{3}\cdot 3x^2=x^2$

Umkehrung:

Grundfunktion: $f(x)=x^2$ **Stammfunktion:** $F(x)=\int x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3+C$

Wir benötigen hierzu diese beiden **Integrationsregeln:**

1. **Potenzregel:** $\boxed{\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C}$ für $n\neq -1$

In Worten: **Der Exponent wird um 1 erhöht,**
und dann teilt man durch den neuen Exponenten.

Dies ist jedoch nur möglich, wenn der Exponent n nicht – 1 ist:

$\int\frac{1}{x}dx=\int x^{-1}dx\overset{?}{=}\cancel{\frac{x^0}{0}}+C$ ist wegen der Division durch 0 nicht möglich.

Ausnahmeregel: $\boxed{\int\frac{1}{x}dx=\left|\ln(x)\right|+C}$

2. **Konstante Faktorenregel**: $\boxed{\int k\cdot f(x)dx=k\cdot\int f(x)dx}$

Ein konstanter Faktor bleibt beim Integrieren unverändert stehen.

1.2 Unbestimmte Integrale, Stammfunktionen zu Potenzfunktionen

Beispiele:

a) $\int 5x^4dx = 5\cancel{\int x^4dx} = \boxed{\cancel{5}\cdot\frac{x^5}{\cancel{5}}+C} = x^5+C$ Das 2. Integral kann wegbleiben.

b) $\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1}+C = -\frac{1}{x}+C$

Erklärung: $\frac{1}{x^2}=x^{-2}$ und $x^{-1}=\frac{1}{x}$

c) $\int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}dx = \boxed{\frac{x^{-2}}{-2}+C} = -\frac{1}{2x^2}+C$

Erklärung: $\frac{1}{x^3}=x^{-3}$ und $\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{2x^2}$

d) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac12}dx = \boxed{\frac{x^{\frac32}}{\frac32}+C} = \frac23\cdot x^{\frac32}+C = \frac23 x\sqrt{x}+C$

Erklärung: $\sqrt{x}=x^{\frac12}$, $x^{\frac32}=\left(x^{\frac12}\right)^3=\sqrt{x}^3=\underbrace{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}_{x}\cdot\sqrt{x}=x\sqrt{x}$ und $\frac{1}{\frac32}=\frac23$

e) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{x^{\frac12}}dx = \int x^{-\frac12}dx = \boxed{\frac{x^{\frac12}}{\frac12}+C} = 2\cdot\sqrt{x}+C$ $\quad \frac{1}{\frac12}=1\cdot\frac{2}{1}=2$

Erklärung: $\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{x^{\frac12}}=x^{-\frac12}$ und $\frac{1}{\frac12}=2$ Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert.

f) $\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{\frac13}dx = \boxed{\frac{x^{\frac43}}{\frac43}+C} = \frac34\cdot x^{\frac43}+C = \frac34 x\sqrt[3]{x}+C$

Erklärung: $\sqrt[3]{x}=x^{\frac13}$ und $x^{\frac43}=x^{1+\frac13}=x^1\cdot x^{\frac13}=x\cdot\sqrt[3]{x}$ und $\frac{1}{\frac43}=\frac34$

g) $\int \frac{2}{x^2}dx = 2\cdot\int x^{-2}dx = 2\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+C = -\frac{2}{x}+C$ Die 2 im Zähler tritt als Faktor auf.

h) $\int \frac{1}{4x^2}dx = \boxed{\int \frac14\cdot\frac{1}{x^2}dx} = \frac14\cdot\int x^{-2}dx = \frac14\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+C = -\frac{1}{4x}+C$ Die 4 im Nenner ergibt den Faktor $\frac14$.

i) $\int \sqrt{2x}\,dx = \int \sqrt{2}\cdot\sqrt{x}\,dx = \sqrt{2}\cdot\int x^{\frac12}dx = \sqrt{2}\boxed{\frac{x^{\frac32}}{\frac32}+C} = \frac23\sqrt{2}\cdot x^{\frac32}+C = \frac23 x\sqrt{2x}+C$

Erklärung: Zur Berechnung der Stammfunktion muss man die Wurzel $\sqrt{2x}$ in ein Produkt $\boxed{\text{Zahl}}\cdot\boxed{x-\text{Potenz}}$ aufsplitten. Der Zahlenfaktor $\sqrt{2}$ bleibt stehen, die x-Potenz wird aufgeleitet.

j) $\int \frac{3}{\sqrt{5x}}dx = \frac{3}{\sqrt5}\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \frac{3}{\sqrt5}\int\frac{1}{x^{\frac12}}dx = \frac{3}{\sqrt5}\int x^{-\frac12}dx = \boxed{\frac{3}{\sqrt5}\cdot\frac{x^{\frac12}}{\frac12}+C} = 2\cdot\frac{3}{\sqrt5}\sqrt{x}+C = \frac{6}{\sqrt5}\sqrt{x}+C$

Aufgabe 1

a) $\int x^6 dx$ b) $\int 6x^3 dx$ c) $\int \frac{x^2}{2} dx$ d) $\int 3x\, dx$ e) $\int \frac{3}{2} x^5 dx$

Aufgabe 2

a) $\int \frac{1}{x^4} dx$ b) $\int \frac{8}{x^3} dx$ c) $\int \frac{1}{4x^5} dx$ d) $\int \frac{6}{5x^2} dx$ e) $\int \frac{1}{2x} dx$

Aufgabe 3

a) $\int x\sqrt{x}\, dx$ b) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx$ c) $\int \sqrt{3x}\, dx$ d) $\int \frac{1}{\sqrt{3x}}\, dx$ e) $\int \frac{1}{2x\sqrt{x}}\, dx$

Lösungen im Lösungsteil am Textende

1.3 Bestimmte Integrale zu Potenzfunktionen

WISSEN:

Mit dem unbestimmten Integral berechnet man Funktionen, genauer gesagt Stammfunktionen. Man benötigt in der Praxis sehr oft die Differenz zweier Funktionswerte einer solchen Stammfunktion. Die zugehörige Berechnung nennt man dann ein bestimmtes Integral.

Ein unbestimmtes Integral liefert also eine Funktion, ein bestimmtes Integral eine Zahl.

Beispiel

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ hat diese Stammfunktionen: $F(x) = \int \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + C = \frac{1}{6}x^3 + C$.

Für eine bestimmte Aufgabe benötigt man z. B. diese Differenz:

$$F(2) - F(-1) = \underbrace{\left[F(x)\right]_{-1}^{2}}_{\text{Abkürzende Schreibweise}} = \underbrace{\left[\tfrac{1}{6}x^3 + C\right]_{-1}^{2}}_{\text{Dasselbe, nur ausführlicher}} = \underbrace{\left[\tfrac{1}{6} \cdot 2^3 + C\right]}_{\text{Das ist } F(2)} - \underbrace{\left[\tfrac{1}{6} \cdot (-1)^3 + C\right]}_{\text{Das ist } F(-1)} = \tfrac{8}{6} + C + \tfrac{1}{6} - C = \tfrac{9}{6} = \tfrac{3}{2}$$

Daran erkennt man zweierlei:

1. Für diese Differenz gibt es eine neue Schreibweise: $\left[F(x)\right]_a^b$. Diese bedeutet, dass man zuerst die „obere Grenze“ b einsetzen und deren Funktionswert berechnen soll, und dann dasselbe mit der „unteren Grenze“ a. Anschließend werden beide Werte subtrahiert.

   Ausführlich bedeutet dies also: $\boxed{\left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)}$

2. Beim Unbestimmten Integral, also bei der Stammfunktion, entsteht zunächst immer ein unbekanntes Absolutglied C, weil man dieses bei der Aufleitung der Funktion f(x), deren Term integriert wird, nicht mehr erkennen kann. Beim bestimmten Integral fällt dieses jedoch weg, weil C zweimal auftritt und dann subtrahiert wird. Daher wird man beim bestimmten Integral für die Stammfunktion immer C = 0 verwenden, also im Grunde das C weglassen.

   Und so sieht dann die **endgültige Berechnung dieses bestimmten Integrals** aus:

$$\boxed{\int_{-1}^{2} \tfrac{1}{2}x^2 dx = \left[\tfrac{1}{6}x^3\right]_{-1}^{2} = \underbrace{\left[\tfrac{1}{6} \cdot 2^3\right]}_{F(2)} - \underbrace{\left[\tfrac{1}{6} \cdot (-1)^3\right]}_{F(-1)} = \tfrac{8}{6} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{9}{6} = \tfrac{3}{2}}$$

Drei Musterbeispiele für Potenzfunktionen:

a) $\int_0^3 \frac{1}{3}x^3dx = \left[\frac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{4}\right]_0^3 = \left[\frac{1}{3}\cdot\frac{81}{4}\right]-\left[\frac{1}{3}\cdot 0\right] = \frac{27}{4}-0=\frac{27}{4}$

Erklärung: Zuerst wurde die Stammfunktion berechnet: $F(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{4}$.

Man verwendet dazu C = 0. Man sollte die Nenner zuerst noch nicht miteinander multiplizieren, denn man kann (sehr oft) gleich anschließend kürzen, und Kürzen verkleinert ja bekanntlich Zahlen!

Man kürzt 81 und 3, denn $\frac{81}{3}=27$. Noch besser ist es jedoch, wenn man 3^4 gar nicht erst berechnet, sondern so kürzt: $\frac{3^4}{3}=3^3=27$ (Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man ihre Exponenten subtrahiert.)

Hinweis: Bei solchen Rechnungen ist es sehr hilfreich, wenn man **Potenzen** im Kopf hat. Es gibt dazu extra ein ***Lernblatt***: 10121 (Ordner Klasse 5-10 Unterordner 10_Klassen 5 bis 7)

b) $\int_1^4 \frac{4}{x^2}dx = \int_1^4 4\cdot x^{-2}dx = \left[4\cdot\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^4 = \left[-\frac{4}{x}\right]_1^4 = \left[-\frac{4}{4}\right]-\left[-\frac{4}{1}\right] = -1+4=3$

Erklärung: Zur Berechnung der Stammfunktion muss man den Bruch $\frac{4}{x^2}$ in ein Produkt

$\boxed{\text{Zahl}}\cdot\boxed{x-\text{Potenz}}$ aufsplitten. Der Zahlenfaktor bleibt stehen, die x-Potenz wird aufgeleitet, also der Exponent wird um 1 erhöht, und durch diesen neuen Exponenten wird geteilt. Dann setzt man die obere Grenze 4 zuerst ein und kann kürzen, dann setzt man die untere Grenze 1 ein und subtrahiert die Werte.

c) $\int_3^{12}\sqrt{3x}\,dx = \int_3^{12}\sqrt3\cdot\sqrt x\,dx = \sqrt3\cdot\int_3^{12} x^{\frac12}dx = \sqrt3\cdot\left[\frac{x^{\frac32}}{\frac32}\right]_3^{12} = \sqrt3\cdot\frac23\left[x\sqrt x\right]_3^{12} = \sqrt3\cdot\frac23\left(12\sqrt{12}-3\sqrt3\right)$

$=\sqrt3\cdot\frac23\cdot\left(12\cdot2\sqrt3-3\sqrt3\right) = \sqrt3\cdot\frac23\cdot\underbrace{\left(24\sqrt3-3\sqrt3\right)}_{=21\cdot\sqrt3} = \sqrt3\cdot\frac{2}{\cancel{3}}\cdot\cancel{21}^{7}\cdot\sqrt3 = 3\cdot2\cdot7=42$

Erklärung: Zur Berechnung der Stammfunktion muss man die Wurzel $\sqrt{3x}$ in ein Produkt

$\boxed{\text{Zahl}}\cdot\boxed{x-\text{Potenz}}$ aufsplitten. Der Zahlenfaktor $\sqrt3$ bleibt stehen, die x-Potenz wird aufgeleitet, also der Exponent wird um 1 erhöht, und durch diese neuen Exponenten wird geteilt. Dann setzt man die obere Grenze 12 zuerst ein und kann kürzen, dann setzt man die untere Grenze 3 ein und subtrahiert die Werte.

Dabei werden diese Kenntnisse über das Wurzelrechnen benötigt:

$\sqrt x = x^{\frac12}$, $x^{\frac32}=\left(x^{\frac12}\right)^3=\sqrt x^3=\underbrace{\sqrt x\cdot\sqrt x}_{x}\cdot\sqrt x = x\sqrt x$, $\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot3}=\sqrt4\cdot\sqrt3=2\cdot\sqrt3$

$\sqrt3\cdot\sqrt3=3$ und schließlich noch aus dem Bruchrechnen: $\frac{1}{\frac32}=\frac23$ (Kehrwert!)

Aufgabe 4

a) $\int_1^3 5x^2 dx$ b) $\int_{-3}^3 \frac{1}{3}x^3 dx$ c) $\int_0^1 5x^4 dx$ d) $\int_2^5 \frac{2}{3}x\, dx$ e) $\int_0^2 x^5 dx$

Aufgabe 5

a) $\int_1^4 \frac{5}{x^2} dx$ b) $\int_2^4 \frac{1}{2x^2} dx$ c) $\int_1^4 \frac{1}{(2x)^2} dx$ d) $\int_1^4 \frac{4}{3x^3} dx$ e) $\int_1^2 \frac{5}{x^4} dx$

Aufgabe 6

a) $\int_0^9 \sqrt{x}\, dx$ b) $\int_0^5 \sqrt{5x}\, dx$ c) $\int_2^8 \sqrt{\frac{x}{2}}\, dx$ d) $\int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}} dx$ e) $\int_3^{12} \frac{1}{\sqrt{3x}} dx$

f) $\int_0^4 x\sqrt{x}\, dx$ g) $\int_1^8 \sqrt[3]{x}\, dx$ h) $\int_{\frac{1}{2}}^8 \frac{1}{\sqrt[4]{2x}} dx$ i) $\int_1^9 \frac{3}{x\sqrt{x}} dx$ j) $\int_2^8 \sqrt{\frac{2}{x}}\, dx$

Lösungen im Lösungsteil am Textende

Zusatz zur **Ausnahmeregel**: $\boxed{\int \frac{1}{x} dx = |\ln(x)| + C}$

Beispiel: $\int_1^4 \frac{2}{x} dx = 2 \cdot \int_1^4 \frac{1}{x} dx = 2 \cdot \left[\ln|x|\right]_1^4 = 2 \cdot (\ln 4 - \ln 1) = 2 \cdot \ln 4$ denn ln 1 =0

$\int_1^e \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_1^e \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\ln|x|\right]_1^e = \frac{1}{2}(\ln e - \ln 1) = \frac{1}{2}$ denn ln e = 1

In beiden Fällen wurde der Integrand in ein Produkt $\boxed{\text{Zahl}} \cdot \boxed{x-\text{Potenz}}$ aufgesplittet:

$\frac{2}{x} = 2 \cdot \frac{1}{x}$ und $\frac{1}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$. Die Zahl bleibt dann als Faktor einfach stehen.

Aufgabe 7

a) $\int_1^4 \frac{5}{x} dx$ b) $\int_2^4 \frac{1}{4x} dx$ c) $\int_1^e \frac{3}{5x} dx$

2 Integration von ganzrationalen Funktionen

2.1 Unbestimmte Integrale zu ganzrationalen Funktionen, Stammfunktionen

Wenn man eine Summe von Termen ableitet, dann besagt die Summenregel für die Ableitung, dass man jeden Summand für sich ableitet:

Grundfunktion:	$f(x)=x^4+x^3+x^2+x+C$	Ableitung:	$f'(x)=4x^3+3x^2+2x+1$
Umkehrung:			
Grundfunktion:	$f(x)=4x^3+3x^2+2x+1$	Stammfunktion:	$F(x)=x^4+x^3+x^2+x+C$
a)	Integralschreibweise:		$F(x)=\int(4x^3+3x^2+2x+C)\,dx=x^4+x^3+x^2+x+C$

Grundfunktion:	$f(x)=\frac{1}{2}x^3+x^2+2x+C$	Ableitung:	$f'(x)=\frac{3}{2}x^2+2x+2$
Umkehrung:			
Grundfunktion:	$f(x)=\frac{3}{2}x^2+2x+2$	Stammfunktion:	$F(x)=\frac{1}{2}x^3+x^2+2x+C$
b)	Integralschreibweise:		$F(x)=\int\left(\frac{3}{2}x^2+2x+2\right)dx=\frac{1}{2}x^3+x^2+2x+C$

c) $\int\left(x^2-3x+1\right)dx=\frac{x^3}{3}-3\cdot\frac{x^2}{2}+x+C=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x+C$

d) $\int(2x-4)^2\,dx=\int\left(4x^2-16x+16\right)dx=4\cdot\frac{x^3}{3}-16\cdot\frac{x^2}{2}+16x+C=\frac{4}{3}x^3-8x^2+16x+C$

Erklärung: Hier muss man zuerst die zweite binomische Formel zur Anwendung bringen. Dabei darf man das **Doppelte Produkt** nicht vergessen: $(a-b)^2=a^2-\boxed{2ab}+b^2$ also lautet dieses doppelte Produkt hier: $2\cdot a\cdot b=2\cdot 2x\cdot 4=16x$.

Aufgabe 8

a) $\int(3x+1)\,dx$

b) $\int\left(x^2-2x-5\right)dx$

c) $\int\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)dx$

d) $\int\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+2\right)dx$

e) $\int\left(2x^4-x^3+2x^2-\frac{1}{2}x+5\right)dx$

f) $\int\left(-\frac{1}{8}x^4+4x^3-5x^2+3x-7\right)dx$

g) $\int(-x+2)^2\,dx$

h) $\int\left(x^2-x+3\right)^2dx$

i) $\int x\left(x^2-4x+3\right)dx$

j) $\int\left(x^2-4\right)(x+1)\,dx$

2.2 Bestimmte Integrale zu ganzrationalen Funktionen

Das Grundwissen dazu wurde in 1.2 auf Seite 6 kurz wiederholt.

Beispiele zu ganzrationalen Funktionen:

a) $\int_1^3 \left(5x^2-3x+7\right)dx = [\underbrace{\tfrac{5}{3}x^3-\tfrac{3}{2}x^2+7x}_{F(x)}]_1^3 = \underbrace{\left[\tfrac{5}{3}\cdot 27-\tfrac{3}{2}\cdot 9+21\right]}_{F(3)} - \underbrace{\left[\tfrac{5}{3}-\tfrac{3}{2}+7\right]}_{F(1)}$

$= 45-\tfrac{27}{2}+21-\tfrac{5}{3}+\tfrac{3}{2}-7 = 59-12-\tfrac{5}{3} = 47-\tfrac{5}{3} = 45\tfrac{1}{3} = \tfrac{136}{3}$

Tipp: Addiere zuerst alle ganzen Zahlen, dann die Brüche mit gleichem Nenner

b) $\int_0^2 \left(\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{1}{3}x^2-2x+1\right)dx = \left[\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{x^5}{5}+\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{x^3}{3}-2\cdot\tfrac{x^2}{2}+x\right]_0^2 = \left[\tfrac{1}{20}x^5+\tfrac{1}{9}x^3-x^2+x\right]_0^2$

$= \left[\tfrac{32}{20}+\tfrac{8}{9}-4+2\right]-\left[0\right] = \tfrac{8}{5}+\tfrac{8}{9}-2 = \tfrac{72+40-90}{45} = \tfrac{22}{45}$

c) $\int_{-1}^5 \left(x^4+x^2\right)dx = \left[\tfrac{1}{5}x^5+\tfrac{1}{3}x^3\right]_{-1}^5 = \left[5^4+\tfrac{1}{3}5^3\right]-\left[-\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{3}\right] = 5^3\left(5+\tfrac{1}{3}\right)+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{3}$

$= 125\cdot\tfrac{16}{3}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5} = \tfrac{2001}{3}+\tfrac{1}{5} = \tfrac{10008}{15} \approx 667{,}2$

d) $\int_1^3 \left(\tfrac{1}{2}x^3+3x^2+x-7\right)dx = \left[\tfrac{1}{8}x^4+x^3+\tfrac{1}{2}x^2-7x\right]_1^3 =$

$= \left[\tfrac{81}{8}+27+\tfrac{9}{2}-21\right]-\left[\tfrac{1}{8}+1+\tfrac{1}{2}-7\right] = \tfrac{80}{8}+\tfrac{8}{2}+6+6 = 10+4+12 = 26$

Tipp: Zuerst Brüche mit gleichen Nennern addieren:

e) $\int_{-1}^1 \left(x^2+1\right)^2 dx = \int_{-1}^1 \left(x^4+2x^2+1\right)dx = \left[\tfrac{1}{5}x^5+\tfrac{2}{3}x^3+x\right]_{-1}^1 =$

$= \left[\tfrac{1}{5}+\tfrac{2}{3}+1\right]-\left[-\tfrac{1}{5}-\tfrac{2}{3}-1\right] = 2\left(\tfrac{1}{5}+\tfrac{2}{3}+1\right) = 2\cdot\tfrac{3+10+15}{15} = 2\cdot\tfrac{28}{15} = \tfrac{56}{15}$

Tipp: Klammert man aus der 2. Klammer (-1) aus, ist sie identisch gleich zur ersten Klammer, also kommt diese doppelt vor:

Aufgabe 9

a) $\int_0^4 \left(2x-5\right)dx$

b) $\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \left(\tfrac{1}{2}x^2-4\right)dx$

c) $\int_{-3}^{2} \left(x^3+2x\right)dx$

d) $\int_{-1}^{2} \left(x^3-\tfrac{1}{2}x^2+3x-4\right)dx$

e) $\int_{-4}^{4} \left(2x^2-\tfrac{1}{8}x^4\right)dx$

f) $\int_0^1 \left(x^2-4\right)^2 dx$

g) $\int_{-2}^{2} \left(\tfrac{1}{2}x+2\right)^2 dx$

h) $\int_2^3 \left(3x-6\right)^3 dx$

3 Integration von gebrochen rationalen Funktionen

(Viele Aufgaben dazu finden man auch in 48012)

3.1 Verschiedene Methoden für drei Typen von Funktionstermen

WISSEN: Es gibt drei Typen von gebrochen rationalen Funktionstermen:

Typ 1: **Im Nenner steht keine Summe.** Dann zerlege man den Term in **Einzelbrüche.**

$$\frac{x^2+2x+4}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{2x}{x} + \frac{4}{x} = x + 2 + \frac{4}{x}$$ Jetzt kann man integrieren.

Typ 2: **Im Zähler steht kein x.** Dann bringt man die Funktion in eine **Potenzform**.

$$\frac{16}{(x+3)^2} = 16 \cdot (x+3)^{-2}$$ Jetzt kann man integrieren, aber Achtung!

Typ 3: **Im Nenner steht eine Summe <u>und</u> im Zähler steht x. Dann benötigt man die Quotientenregel, die in diesem Text aber nicht behandelt werden. Siehe dazu Text 48012 Abschnitt 3.5 und 3.6 und für bestimmte Integration Text 48013 Seite 9 bis 11.**

$\frac{x+1}{x^2-9}$ oder $\frac{2x}{(x-3)^2}$ sind Beispiele dafür, sie werden hier nicht behandelt.

3.2 Unbestimmte Integrale Typ 1

a) $\int \frac{x^2+4}{x^2}dx = \int\left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{4}{x^2}\right)dx = \int\left(1 + 4 \cdot x^{-2}\right)dx = x + 4 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C = x - \frac{4}{x} + C$

b) $\int \frac{x^4-2x^2+1}{2x^2}dx = \int\left(\frac{x^4}{2x^2} - \frac{2x^2}{2x^2} + \frac{1}{2x^2}\right)dx = \int\left(\frac{1}{2}x^2 - 1 + \frac{1}{2} \cdot x^{-2}\right)dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{6}x^3 - x - \frac{1}{2x} + C$

Erklärung: Im 3. Integral wurde in $\boxed{\text{Zahl}} \cdot \boxed{x-\text{Potenz}}$ aufgesplittet! Auch bei c:

c) $\int \frac{2x+3}{x^2}dx = \int\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)dx = \int\left(2 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot x^{-2}\right)dx = 2 \cdot \ln|x| + 3 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C = 2 \cdot \ln|x| - \frac{3}{x} + C$

Siehe Aufgabe 2 auf Seite 6

Aufgabe 10

a) $\int \frac{x^2+2}{x^2}dx$ b) $\int \frac{x^4-4x^2+6}{x^2}dx$ c) $\int \frac{x^2-1}{4x^2}dx$

d) $\int \frac{(x^2-3)^2}{x^2}dx$ e) $\int \frac{5x^4-8}{2x^2}dx$ f) $\int \frac{5x+2}{6x}dx$

g) $\int \frac{x^2+4}{2x}dx$ h) $\int \frac{x^2-4x+2}{x^2}dx$ i) $\int \frac{(t^2-1)^2}{2t}dt$

j) $\int \frac{x^4+x^3-2x+1}{4x^2}dx$ k) $\int \frac{2x^4-3x^2+4}{x^3}dx$ l) $\int \frac{x^3-2x^2+6x-1}{3x^2}dx$

3.3 Bestimmte Integrale Typ 1

Beispiele:

a) $\int_1^2 \frac{x^2-4}{x^2}dx = \int_1^2 \left(1-\frac{4}{x^2}\right)dx = \left[x+\frac{4}{x}\right]_1^2 = [2+2]-[1+4] = -1$

b) $\int_1^4 \frac{x^2+4}{8x^2}dx = \int_1^4 \left(\frac{x^2}{8x^2}+\frac{4}{8x^2}\right)dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot x^{-2}\right)dx = \left[\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^4 = \left[\frac{1}{8}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\right]_1^4 = \left[\frac{1}{8}x-\frac{1}{2x}\right]_1^4 =$

$= \left[\frac{1}{8}\cdot 4-\frac{1}{2\cdot 4}\right]-\left[\frac{1}{8}-\frac{1}{2\cdot 1}\right] = \frac{4}{8}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\boxed{+}\cancel{\frac{1}{2}}\,\frac{4}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

Hier bringt man gleich alles auf den Nenner 8, also ausnahmsweise wird nicht gekürzt sondern einmal erweitert.

c) $\int_1^3 \frac{x-2}{x}dx = \cancel{\int_1^3 \left(1-\frac{2}{x}\right)dx} = \int_1^3 \left(1-2\cdot\frac{1}{x}\right)dx = \left[x-2\cdot\ln|x|\right]_1^3 = [3-2\cdot\ln 3]-\left[1-2\cdot\underbrace{\ln 1}_{=0}\right] = 2-2\cdot\ln 3$

Auf das 2. Integral kann man verzichten.

d) $\int_2^6 \frac{x^2-4x+6}{x}dx = \int_2^6 \left(\frac{x^2}{x}-\frac{4x}{x}+\frac{6}{x}\right)dx = \int_2^6 \left(x-4+6\cdot\frac{1}{x}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2}-4x+6\cdot\ln|x|\right]_2^6$

$= [18-24+6\cdot\ln 6]-[2-8+6\cdot\ln 2] = -6+6\cdot\ln 6+6-6\cdot\ln 2 = 6\cdot\ln 6-6\ln 2 = 6\cdot(\ln 6-\ln 2)$

Nun sollte man sich an eine Logarithmusregel erinnern: $\ln\frac{a}{b} = \ln a-\ln b$.

Von rechts nach links angewandt liefert sie: $\ln 6-\ln 2 = \ln\frac{6}{2} = \ln 3$. Also lautet das Ergebnis:

$= 6\cdot\ln 3$.

Aufgabe 11

a) $\int_1^2 \frac{x^2-16}{2x^2}dx$ b) $\int_2^4 \frac{x^4-8}{2x^2}dx$ c) $\int_1^2 \frac{8x^4+2x^2-1}{4x^2}dx$

d) $\int_{-3}^{-1} \frac{x^2-1}{x^2}dx$ e) $\int_1^2 \frac{3x^4-2x^2-8}{16x^2}dx$ f) $\int_1^2 \frac{x^2-3}{x^4}dx$

Aufgabe 12

a) $\int_1^2 \frac{x^2+9}{x}dx$ b) $\int_{-4}^{-2} \frac{x^2-2}{4x}dx$ c) $\int_1^4 \frac{x^2+2x+5}{x^2}dx$

d) $\int_1^2 \frac{x^3-x^2+x-1}{2x^2}dx$ e) $\int_2^4 \frac{(x^2-2)^2}{2x}dx$ f) $\int_1^2 \frac{x^2-4x+1}{x^3}dx$

3.4 Unbestimmte Integrale Typ 2

Beispiele: Es geht hier um Funktionsterme, die im Nenner eine Summe haben, aber im Zähler kein x!

a) $$\int \frac{1}{(x+2)^2}dx = \int (x+2)^{-2}dx = \frac{(x+2)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x+2} + C$$

Hier wurde genau so aufgeleitet, wie bei $\int \frac{1}{x^2}dx$, nur dass statt x eine Summe da steht.

Man sollte, wenn man unsicher ist, ob das so richtig geworden ist, die Probe machen.

Dazu leitet man diese Stammfunktion $F(x) = -\frac{1}{x+2} + C$ ab und sollte wieder auf $\frac{1}{(x+2)^2}$ kommen. Zum Ableiten braucht man wieder die Potenzschreibweise:

$$F(x) = -\frac{1}{x+2} + C = -(x+2)^{-1} + C \xrightarrow{\text{Ableiten}} F'(x) = +(x+1)^{-2}\cdot\boxed{1} = \frac{1}{(x+2)^2}$$

Bitte daran denken, dass man bei der Anwendung der Ableitungs-Potenzregel auf Klammern die Kettenregel anwenden muss, die da besagt, dass man (weil man ja eine Klammer und keine einfache x-Potenz ableitet) noch mit der inneren Ableitung (der Klammer) multiplizieren muss. Diese ist hier die Zahl 1. Hier hat diese innere Ableitung also nichts verändert.

b) **Dieselbe Methode wird bei diesem Beispiel zu einem Fehler führen:**

$$\int \frac{1}{(4x-1)^2}dx = \int (4x-1)^{-2}dx = \underbrace{\frac{(4x-1)^{-1}}{-1}}_{\text{falsch!}} + C = -\frac{1}{4x-1} + C$$

Um zu erkennen, was hier falsch gemacht worden ist, machen wir wie oben die Probe:

$$F(x) = -\frac{1}{4x-1} + C = -(4x-1)^{-1} + C \xrightarrow{\text{Ableiten}} F'(x) = +(4x-1)^{-2}\,\boxed{\cdot 4} = \frac{4}{(4x-1)^2}$$

Wie man sieht taucht plötzlich die **innere Ableitung 4 im Zähler** auf. Und daher war unser Integrationsergebnis falsch. Nun ist es jedoch leicht, den Fehler zu korrigieren:

Wir müssen bei der Bildung der Stammfunktion zusätzlich durch die innere Ableitung teilen:

$\int (4x-1)^{-2}dx$	Exponent der Klammer um 1 erhöhen und durch den neuen Exponent teilen	$\frac{(4x-1)^{-1}}{-1}$	zusätzlich noch durch die innere Ableitung (der Klammer) teilen	$\frac{(4x-1)^{-1}}{-1\cdot\boxed{4}}$

Richtige Berechnung dieser Stammfunktion:

$$\int \frac{1}{(4x-1)^2}dx = \int (4x-1)^{-2}dx = \frac{(4x-1)^{-1}}{-1\cdot\boxed{4}} + C = -\frac{1}{4\cdot(4x-1)} + C$$

Hinweis: Diese Methode, einen Klammerterm zu integrieren, klappt nur bei linearen Klammerinhalten, also der Form (ax+b).
Enthält die Klammer beispielsweise x^2, wird das Ergebnis wieder falsch.
Man kann das jederzeit durch eine Ableitungs-Probe überprüfen.

3.5 Bestimmte Integrale Typ 2

Beispiele

a) $\int_0^2 \frac{4}{(2x+1)^2}dx = 4\int_0^2 (2x+1)^{-2}\,dx = \left[4\frac{(2x+1)^{-1}}{-1\cdot 2}\right]_0^2 = \left[-\frac{2}{2x+1}\right]_0^2 = -\frac{2}{5}+\frac{2}{1} = -\frac{2}{5}+\frac{10}{5} = \frac{8}{5}$

Die obere Grenze wird zuerst eingesetzt, dann die untere, dann wird subtrahiert,

b) $\int_{-1}^4 \frac{4}{x+2}dx = 4\cdot\int_{-1}^4 \frac{1}{x+2}dx = 4\cdot\left[\ln|x+2|\right]_{-1}^4 = 4\cdot(\ln 6 - \ln 1) = 4\cdot\ln 6$

denn ln 1 = 0. Das 2. Integral kann man weglassen und sofort die Stammfunktion anschreiben.

Aufgabe 13

a) $\int \frac{1}{(2-x)^2}dx$ b) $\int \frac{20}{(x+6)^3}dx$ c) $\int \frac{24}{(8x-3)^2}dx$ d) $\int \frac{24}{(8x-3)^4}dx$

Aufgabe 14

a) $\int \frac{1}{x+3}dx$ b) $\int \frac{2}{2-x}dx$ c) $\int \frac{24}{8x-3}dx$ d) $\int \frac{6}{4-2x}dx$

Aufgabe 15

a) $\int_{-2}^0 \frac{3}{(x-1)^2}dx$ b) $\int_0^2 \frac{4}{(x+2)^3}dx$ c) $\int_0^1 \frac{12}{(4x+1)^2}dx$ d) $\int_{-1}^0 \frac{12}{(2-3x)^3}dx$

Aufgabe 16

a) $\int_{-2}^4 \frac{1}{x+3}dx$ b) $\int_2^{e+1} \frac{4}{x-1}dx$ c) $\int_4^7 \frac{6}{2x+1}dx$ d) $\int_{e+2}^{e^2+2} \frac{2}{2-x}dx$